

Performances piecewise defined functions in analytic form, prime-counting function, ξ sets

Oleh Kyrhan
profugo.canis@gmail.com

6 апреля 2016 г.

Аннотация

В статье рассматривается представление дискретных функций, определенных в аналитической форме без использования приближений, а именно функции Хевисайда, тождественной функции, дельта-функции Дирака и функции распределения простых чисел.

А также в статье введен и рассмотрен новый тип множеств (ξ -множества) посредством аналогии взятой из нахождения суммы ряда Гранди и других противоречий в математике и физике. С помощью ξ -множеств интерпретируется парадокс Рассела в системе аксиом наивной теории множеств.

1 Введения

В статье рассматривается вопрос представления дискретно определенных функций в аналитической форме без использования аппроксимации, а именно: функции Хевисайда, функция тождества, дельта-функция Дирака, функция распределения простых чисел и доказана теорема о представлении любой кусочно-заданной функции

$$t(x) = \begin{cases} t_0(x), & x < x_1 \\ t_1(x), & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots \\ t_n(x), & x_n \leq x \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ точки изменения значения функции $t(x)$. Будут показаны функции из использованием несобственного и определенного интегралов. Например функция Хевисайда дискретные форы которой [1, 2, 3]:

$$H_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

и

$$H_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

имеют аналитические формы с использованием аппроксимации [1, 2, 3]:

$$H(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} k \cdot x \right)$$

$$H(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-2k \cdot x}}$$

$$H(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} k \cdot x \right)$$

и интегральное представление с использованием аппроксимации и несобственного интеграла [2, 3]:

$$H(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} e^{ix\tau} d\tau$$

2 Формулировка основных результатов (функции Хевисайда, функция тождества)

Переведем в аналитическую форму без аппроксимаций функции (2), (3) и функцию тождества, с помощью которых переведем функцию распределения простых чисел в аналитическую форму без аппроксимаций.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$$

который равняется $\frac{1}{2}$. Теперь на основе этого интеграла построим функцию:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x e^{xt}}{(1+e^{xt})^2} dt$$

Найдем значение этой функции на числовой оси в соответствии со значениями переменной x .

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x e^{xt}}{(1+e^{xt})^2} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1+e^{xt}} \right) - \left(-\frac{1}{1+e^{x0}} \right) = \frac{1}{2} - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+e^{xt}} \right)$$

для $x > 0$

$$f(x > 0) = \frac{1}{2} - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+e^{xt}} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

для $x < 0$

$$f(x < 0) = \frac{1}{2} - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+e^{xt}} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

для $x = 0$

$$f(x = 0) = \frac{1}{2} - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+e^{0t}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

В дискретном определении функция $f(x)$ имеет следующую форму:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Теперь прибавим $\frac{1}{2}$ к функции $f(x)$ и получим функцию которая совпадает из функцией (3)

$$H_2(x) = f(x) + \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} \frac{x e^{xt}}{(1+e^{xt})^2} dt + \frac{1}{2} \quad (4)$$

Чтобы получить функцию (2) рассмотрим функцию

$$u(x) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-t \cdot x^2} dt$$

Найдем значения функции $u(x)$ на числовой оси

$$u(x) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-t \cdot x^2} dt = \left(-e^{-t \cdot x^2} \right) \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot x^2} - \left(-e^{-0 \cdot x^2} \right) = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot x^2} + 1 \quad (5)$$

у нас есть два варианта $x = 0$ и $x \neq 0$ так как в уравнения (5) входит квадрат x

$$u(x = 0) = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot 0} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$u(x \neq 0, x^2) = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot k} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Дискретная форма функции $u(x)$ имеет следующий вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

функция $rt(x) = 1 - u(x)$ называется функция тождества.

Теперь с помощью функций (4) и $rt(x)$ построим функцию (2)

$$\begin{aligned} H_1(x) &= H_2(x) + \frac{1}{2}rt(x) = \int_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2} dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\infty x^2 e^{-tx^2} dt \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 e^{-tx^2} dt + \int_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2} dt \\ H_1(x) &= 1 + \int_0^\infty \left(\frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2} - \frac{1}{2}x^2 e^{-tx^2} \right) dt \end{aligned}$$

Теперь покажем аналитические формы без аппроксимаций и несобственного интеграла функции (2) и $rt(x)$

Рассмотрим функцию $c(x)$

$$c(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{(1 + e^{-x \tan t})^2} dt$$

Вычислим значение функции $c(x)$ при разных x

$$c(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{(1 + e^{-x \tan t})^2} dt = -\frac{1}{1 + e^{x \tan t}} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{1 + e^{x \tan \frac{\pi}{2}}} - \left(-\frac{1}{1 + e^{x \tan 0}} \right)$$

так как $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ и $\tan 0 = 0$ то функция $c(x)$ принимает те самые значения что и функция $f(x)$.

$$c(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Заменим $f(x)$ на $c(x)$ в (4), тем самым получим аналитическую форму без аппроксимаций и несобственного интеграла функцию (3):

$$H_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{(1 + e^{-x \tan t})^2} dt + \frac{1}{2} \quad (6)$$

Теперь найдем аналитическую форму без аппроксимаций и несобственного интеграла функции $rt(x)$, рассмотрим функцию

$$q(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t dt$$

Вычислим значение функции $q(x)$ при разных x

$$\begin{aligned} q(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t dt = \left(-e^{-x^2 \tan t} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-e^{-x^2 \tan t} \right) - \left(-e^{-x^2 \tan 0} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-e^{-x^2 \tan t} \right) + 1 \end{aligned}$$

у нас есть два варианта $x = 0$ и $x \neq 0$ так как в функцию $q(x)$ входит квадрат x

$$q(x = 0) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-e^{-0 \tan t}) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$q(x \neq 0, k = x^2) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-e^{-k \tan t}) + 1 = 0 + 1 = 1$$

как видно функция $q(x)$ совпадает с $u(x)$. Функция тождества в таком случаи имеет вид

$$rt(x) = 1 - q(x) = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t \, dt \quad (7)$$

Теперь определим функцию $H_1(x)$ с помощью функций (6) и (7)

$$\begin{aligned} H_1(x) &= H_2(x) + \frac{1}{2}rt(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{(1 + e^{-x \tan t})^2} dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t dt \right) = \\ &= 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{(1 + e^{-x \tan t})^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t \right) dt \\ H_1(x) &= 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{(1 + e^{-x \tan t})^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t \right) dt \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь у нас есть все чтобы доказать теорему о представлении любой кусочно-заданной функции в аналитической форме без использования аппроксимации.

3 Кусочно-здание функции

Теорема 1. *Всякую кусочно-заданную функцию (1) можно представить в аналитической форме без аппроксимации, если функции $t_0(x)$, $t_1(x)$, $t_2(x)$... $t_n(x)$ имеют аналитическую форму без аппроксимаций.*

Доказательство. Используем функцию (8). Возьмем два числа $a < b$ и построим функцию единичного импульса

$$I(x, a, b) = H_1(x - a) - H_1(x - b)$$

которая равняется 1 когда $a \leq x < b$ и 0 в остальных случаях. Составим функцию (1) используя $I(x)$ и функции $t_0(x)$, $t_1(x)$, $t_2(x)$... $t_n(x)$

$$t(x) = (1 - H_1(x - x_1)) t_0(x) + \sum_{i=2}^{n-1} I(x, x_{i-1}, x_i) t_{i-1}(x) + H_1(x - x_n) t_n(x)$$

исходя из построения функции $t(x)$, теорема 1 доказана. \square

4 Дельта-функция Дирака

Представим дельта-функцию Дирака [4, 5] в аналитической форме без аппроксимации через производную функции (8) по переменной x

$$\begin{aligned} \frac{dH^*(x)}{dx} &= \frac{d \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-t} - x^2 \cdot e^{-t \cdot x^2} + \frac{x \cdot e^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) dt \right)}{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \left(e^{-t} - x^2 \cdot e^{-t \cdot x^2} + \frac{x \cdot e^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right)}{dx} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} - 2e^{-t \cdot x^2} x \right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2e^{2t \cdot x} t \cdot x}{(1 + e^{t \cdot x})^3} \right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{t \cdot x} t \cdot x}{(1 + e^{t \cdot x})^2} + 2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x^3 \right) dt \end{aligned}$$

$$\frac{dH^*(x)}{dx} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{t \cdot x} + e^{t \cdot x} t \cdot x}{(1 + e^{t \cdot x})^2} - 2e^{-t \cdot x^2} x \right) dt + \int_0^\infty \left(2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x^3 - \frac{2e^{2t \cdot x} t \cdot x}{(1 + e^{t \cdot x})^3} \right) dt \quad (9)$$

Найдем значения функции (9)

$$\begin{aligned} \frac{dH^*(x)}{dx} &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} - 2e^{-t \cdot x^2} x \right) dt + \int_0^\infty \left(-\frac{2e^{2t \cdot x} t \cdot x}{(1 + e^{t \cdot x})^3} + \frac{e^{t \cdot x} t \cdot x}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) dt + \int_0^\infty (2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x^3) dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) \Big|_0^A - \lim_{A \rightarrow \infty} \left(2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x + \frac{t}{1 + e^{t \cdot x}} \right) \Big|_0^A = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} (-2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{1 + e^{t \cdot x}} \right) - 0 - 0 + 0 = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} (-2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{1 + e^{t \cdot x}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} (-2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x) \end{aligned}$$

второй член при любом $x < \infty$ равняется нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-2e^{-t \cdot x^2} t \cdot x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-2 \frac{t \cdot x}{e^{t \cdot x^2}} \right) = 0.$$

Рассмотрим первый член, при $x > 0$, пускай $\infty > k > 0$ и $k = |x|$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^{t \cdot k}}{(1 + e^{t \cdot k})^2} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^{t \cdot k}}{e^{2t \cdot k} + 2e^{t \cdot k} + 1} \right) = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 e^{t \cdot k}}{2t \cdot e^{2t \cdot k} + 2t \cdot e^{t \cdot k}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 e^{t \cdot k}}{2t \cdot e^{t \cdot k} (e^{t \cdot k} + 1)} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{2(e^{t \cdot k} + 1)} \right) = 0. \end{aligned}$$

при $x < 0$, пускай $\infty > k > 0$ и $k = |x|$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^{-t \cdot k}}{(1 + e^{-t \cdot k})^2} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{e^{t \cdot k} (1 + e^{-t \cdot k})^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{e^{t \cdot k} (1 + \frac{1}{e^{t \cdot k}})^2} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{e^{t \cdot k} (1 + \frac{1}{e^{t \cdot k}})^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{e^{t \cdot k} (1 + 0)^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

при $x = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{te^0}{(1 + e^0)^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{4} \right) = \infty.$$

Как видно уравнения (9) имеет значения дельта-функции Дирака т.е. $\frac{dH^*(x)}{dx} = \delta^*(x)$.

5 Функция распределения простых чисел

Чтобы получить функцию распределения простых чисел [6], нужно построить функцию количества делителей $\sigma_0(n)$ числа n на основе которой строится функция идентификации простых чисел.

Переведем функцию $\sigma_0(n)$ количества делителей числа n в аналитическую форму без аппроксимации. Используем свойство функции $\sin(x)$, если x целое то $\sin(x) = 0$.

Если i делит число n то $\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right) = 0$ в противном случае $\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right) \neq 0$. Используем функцию (7), тогда следующая функция $rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)$ равняется 1 если i делит n и 0 в противном случае. Теперь построим функцию $\sigma_0(n)$ которая суммирует $rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)$ по всем i

$$\sigma_0(n) = \sum_{i=1}^{\infty} rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)$$

Теперь построим функцию идентификации простых чисел на основе функции $\sigma_0(n)$ и $rt(x)$, так как у простого числа всего два делителя, 1 и оно само, то

$$fes(n) = rt(\sigma_0(n) - 2) = rt\left(\sum_{i=1}^{\infty} rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right) - 2\right)$$

дискретная форма которого будет иметь следующий вид

$$fes(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ простое} \\ 0, & n \text{ составное} \end{cases}$$

Теперь имея функцию идентификации простых чисел и функцию Хевисайда $H_1(x)$ построим функцию распределения простых чисел в аналитической форме без использования аппроксимации.

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} fes(i)H_1(x-i) = \sum_{i=1}^{\infty} rt\left(\sum_{j=1}^{\infty} rt\left(\sin\left(\pi\frac{i}{j}\right)\right) - 2\right)H_1(x-i)$$

Общий вид функции распределения простых чисел:

$$\begin{aligned} \pi(x) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin\left(\pi\frac{i}{j}\right)^2 \tan z \sin\left(\pi\frac{i}{j}\right)^2 \sec^2 z dz} - 2\right)^2 \tan v} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin\left(\pi\frac{i}{j}\right)^2 \tan z \sin\left(\pi\frac{i}{j}\right)^2 \sec^2 z dz} - 2\right)^2 \sec^2 v dv \right) \right. \\ & \left. \cdot \left(1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{(x-i) \sec^2 t e^{-(x-i) \tan t}}{(1 + e^{-(x-i) \tan t})^2} - \frac{1}{2} e^{-(x-i)^2 \tan t} (x-i)^2 \sec^2 t \right) dt \right) \right) \end{aligned}$$

Все вычисления были проверены в *wolfram mathematica*.

6 Введения 2

Show me the infinity and I will prove the inconsistency of the Universe, let me infinity and I create my Universe.

- Ron Swanson -

Противоречия в математике

Некоторые противоречия¹ используются на практике (или используются утверждения приводящие к противоречиям) в математике и физике, например:

- Использование мнимой единицы [7] не нужно перечислять, так как без нее не было некоторых разделов математики и физики, но не только ее определения не вписывается в наше понимание, она еще и приводит к противоречию:

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} \text{ откуда следует } -1 = i^2 = ii = \frac{i}{i} = 1.$$

- Конечная сумма всех натуральных чисел [3]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

¹ В работе противоречия рассматриваются не как недостаток логики или неполнота теории, а как нечто что не вписывается в рамки логики и имеет право на существование.

используется в объяснении эффекта Казимира и в теории струн. Существует множество способов найти сумму всех натуральных чисел, рассмотрим один из них:

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

$$4c = \quad 4 + \quad 8 + \quad 12 + \dots$$

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

ряд $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ является разложения в степенной ряд функции $1/(1+x)^2$ при x , равном 1. Соответственно

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = 1/(1+1)^2 = \frac{1}{4}$$

поделив обе части на -3 получаем $c = -\frac{1}{12}$.

Следствиям такого суммирования, это нахождения сумм следующих бесконечных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots = 0.$$

Рассмотрим еще несколько противоречий которые имеют место в математике.

- Теорема Римана об условно сходящихся рядах [10] которая гласит что:

*Пусть ряд **A** сходится условно, тогда для любого числа $\mathbf{S} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ можно так поменять порядок суммирования, что сумма нового ряда будет равна **S**.*

- Ряд Гранди [8, 9] — это бесконечный ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ или } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Один из очевидных методов нахождения суммы ряда, это воспринимать его как телескопический ряд и попарно сгруппировать члены: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$. С другой стороны, похожим способом можно получить другой ответ: $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$.

Таким образом, различной расстановкой скобок в ряде Гранди, можно получить в качестве суммы 0 или 1. Если считать ряд Гранди расходящейся геометрической прогрессией, то, используя те же методы что и при работе со сходящимися геометрическими прогрессиями, можно получить третье значение, $1/2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - (1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

из этого можно прийти к двум выводам: Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ не имеет суммы или его сумма должна быть равна $1/2$.

Перенесем (по аналогии) рассуждения про сумму ряда Гранди на множества.

ξ -парадокс

Для рассмотрения ξ -парадокса нам понадобится вспомогательная теорема об операциях над множествами. В тексте пустое множество обозначается символом θ .

Теорема 2. Для двух множеств A и B , $A \neq B$ справедливо равенство

$$(A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup \dots = A \cap (B \cup A) \cap (B \cup A) \cap (B \cup A) \cap (B \cup \dots$$

Доказательство. Для двух множеств A и двух множеств B , операции объединения и пересечения ассоциативная:

$$A \cap B = A \cap B \cup A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup A) \cap B$$

Для трех множеств A и двух множеств B , операции объединения и пересечения ассоциативная:

$$A = A \cap B \cup A \cap B \cup A = (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup A = A \cap (B \cup A) \cap (B \cup A)$$

Для производного количества элементов ассоциативность поочередного использования операций объединения и пересечения доказывается по индукции. \square

Теорема 3 (ξ парадокс). Для произвольного множества $G \neq \theta$ справедливо утверждения $G \neq \theta \Leftrightarrow G = \theta$.

Доказательство. Пустое множество представим, как бесконечное объединения пустых множеств:

$$\theta = \theta \cup \theta \cup \theta \cup \theta \cup \theta \cup \theta \cup \dots$$

каждое из них, представим как пересечения произвольного не пустого множества $G \neq \theta$ из пустым $\theta = G \cap \theta$, из этого получим

$$\theta = (G \cap \theta) \cup (G \cap \theta) \cup (G \cap \theta) \cup (G \cap \theta) \cup (G \cap \theta) \cup (G \cap \theta) \cup \dots$$

согласно теореме 2 поменяем порядок поочередного применения операций пересечения и объединения

$$\begin{aligned} \theta &= G \cap (\theta \cup G) \cap (\theta \cup G) \cap (\theta \cup G) \cap (\theta \cup G) \cap (\theta \cup G) \cap (\theta \cup \dots = \\ &= G \cap G \cap G \cap G \cap G \cap G \cap \dots = G. \end{aligned}$$

Обратное утверждения доказывается аналогично, нужно рассмотреть эту процедуру в обратном порядке. \square

Теорема 3 утверждает что “всякое непустое множество является пустым, и наоборот” это противоречия, но по аналогии из рядом Гранди мы не станем отвергать теорему 3, мы сделаем предположения о возможности существования множества которое одновременно может равняться двум или более множествам.

7 ξ -множество

Определения ξ -множества. Из теоремы 3 следует что ряд

$$G \cap \theta \cup G \cap \theta \cup G \cap \theta \cup G \cap \theta \cup G \cap \theta \cup G \cap \theta \cup \dots \quad (10)$$

равняется сразу двум множествам G и θ одновременно, как и ряд Гранди 0 и 1, предположим что ряд (10) равняется некоторому множеству назовем его ξ -множество.

Расширим ряд (10) на случай произвольных двух множеств, построим ξ -множество класса 2 которое одновременно равняется двум не пустым множествам. Возьмем два произвольных множества $A \neq \theta$ и $B \neq \theta$ из условием что

$$A \cap B = F \neq \theta \text{ и } A \cup B = D \neq \theta$$

на их основе построим ряд

$$A \cap B \cup A \cap B \cup A \cap B \cup A \cap B \cup A \cap B \cup \dots$$

найдем какому множеству равняется этот ряд. Расставим дужки, и это даст нам следующий результат

$$A \cap (B \cup A) \cap (B \cup A) \cap (B \cup A) \cap (B \cup A) \cap (B \cup \dots =$$

$$= \mathbf{A} \cap \mathbf{D} \cap \mathbf{D} \cap \mathbf{D} \cap \mathbf{D} \cap \dots = \mathbf{A}$$

теперь согласно теореме 2 переставим дужки и получим

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \dots = \\ & = \mathbf{F} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{F} \cup \dots = \mathbf{F} \end{aligned}$$

как видно этот ряд одновременно равняется двум множествам \mathbf{A} и \mathbf{F} .

Из этого можно сделать определение ξ множества

Определение 1. ξ множество класса n это множество которое одновременно равняется нескольким множествам, класс ξ множества это количество множеств которым равняется это ξ множество.

Обозначим ξ -множество явно $\mathbf{G}_1 || \mathbf{G}_2 || \mathbf{G}_3 || \dots || \mathbf{G}_n$ (явно показывает каким именно множествам равняется ξ -множество) и не явно \mathbf{G}^n .

Если класс ξ -множества бесконечный, то он обозначается алефом того множества \aleph множеств которым оно равняется одновременно.

Обычное множество это ξ -множество произвольного класса которое равняется одному и тому же множеству $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} || \mathbf{A} || \mathbf{A} || \dots || \mathbf{A} || \dots$

Функции образования ξ -множеств, ξ -функции

Определение 2. Функции образования ξ -множеств обозначаются как

$$\cap(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \text{ и } \cup(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

и имеют следующий вид:

$$\cap(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cup \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cup \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cup \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cup \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cup \dots \quad (11)$$

$$\cup(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \cup \dots \quad (12)$$

Используя теорему 2, значения этих функций будут следующими ξ -множествами:

$$\cup(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) || \mathbf{A}$$

и

$$\cap(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} || (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \text{ соответственно. Из определения функций (11) и (12) следует следующая}$$

теорема для ξ -множества класса 2

Теорема 4. Для двух множеств \mathbf{A} и \mathbf{B} которым равняется ξ множество класса 2 справедливо утверждения: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ или $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

Операции над ξ -множествами класса 2, образования ξ -множеств класса больше 2

Объединения ξ -множеств класса 2. Возьмем два ξ множества класса 2 $\mathbf{A} || \mathbf{F}$, $\mathbf{B} || \mathbf{C}$ и объединим их $\mathbf{A} || \mathbf{F} \cup \mathbf{B} || \mathbf{C}$. Так как каждое из них равняется одновременно \mathbf{A} , \mathbf{F} и \mathbf{B} , \mathbf{C} соответственно, то определим их объединение при условии

$$\mathbf{A} || \mathbf{F} \cup \mathbf{B} || \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{A} || \mathbf{F} \cup \mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \\ \mathbf{F} \cup \mathbf{B} \end{cases} \\ \mathbf{A} || \mathbf{F} \cup \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{A} \cup \mathbf{C} \\ \mathbf{F} \cup \mathbf{C} \end{cases} \end{cases}$$

что будет равняться ξ -множеству класса 4

$$\mathbf{A} || \mathbf{F} \cup \mathbf{B} || \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) || (\mathbf{B} \cup \mathbf{F}) || (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) || (\mathbf{F} \cup \mathbf{C})$$

пересечения и разность определяется по той же схеме

$$\mathbf{A} || \mathbf{F} \cap \mathbf{B} || \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) || (\mathbf{B} \cap \mathbf{F}) || (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) || (\mathbf{F} \cap \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} || \mathbf{F} \setminus \mathbf{B} || \mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) || (\mathbf{B} \setminus \mathbf{F}) || (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}) || (\mathbf{F} \setminus \mathbf{C})$$

Используя эти определения операций над ξ -множествами, докажем следующую теорему

Теорема 5. При операциях объединения, пересечения и разность двух ξ -множеств классов n и m , результирующее ξ -множество будет иметь класс $k \leq nm$.

Доказательство. В самом деле, если рассмотреть определения операций объединения, пересечения и разность двух ξ -множеств классов 2 и взять к сведению что $\mathbf{A} = \mathbf{A} \parallel \mathbf{A} \parallel \dots$, то теорема доказана для этих ξ -множеств. Для ξ -множеств класса больше 2 теорема доказывается по индукции. \square

Тем самым мы получили средство образования ξ -множества произвольного класса используя эти операции.

Принадлежность элементов к ξ -множеству

Возьмем произвольное ξ -множество

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\aleph} = \parallel_{i \in \mathbf{R}} \mathbf{A}_i \quad (13)$$

класса $\aleph = \overline{\mathbf{R}}$. Рассмотрим ξ -множество (13) класса \aleph_0 т.е. $\overline{\mathbf{R}} = \aleph_0$, принадлежность элементов к этому множеству неоднозначно т.е. если элемент a принадлежит множествам \mathbf{A}_i некоторого подмножества множества всех \mathbf{A}_i из (13), то эта принадлежность обозначается как

$$\mathbf{a} \stackrel{k_1, k_2, \dots, k_d}{\in} \tilde{\mathbf{A}}^{\aleph_0} = \mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2 \parallel \dots \parallel \mathbf{A}_n \parallel \dots \Leftrightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{a} \in \mathbf{A}_{k_2}, \dots, \mathbf{a} \in \mathbf{A}_{k_d}$$

или

$$\mathbf{a} \stackrel{k_1, k_2, \dots, k_d}{\in} \tilde{\mathbf{A}}^{\aleph_0}$$

где индексы k_1, k_2, \dots, k_d над знаком принадлежности означают, каким именно множествам \mathbf{A}_i из (13) принадлежит элемент \mathbf{a} .

Если мощность множества множеств \mathbf{A}_i произвольна \aleph т.е. ξ -множество имеет класс \aleph , то принадлежность элемента \mathbf{a} к $\tilde{\mathbf{A}}^{\aleph}$ определяется как

$$\mathbf{a} \stackrel{\mathbf{T}}{\in} \tilde{\mathbf{A}}^{\aleph}$$

где $\mathbf{T} = \{i | \mathbf{a} \in \mathbf{A}_i\}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}} = \aleph$.

Если элемент b принадлежит всем множествам \mathbf{A}_i из (13), то это обозначается как $\mathbf{b} \stackrel{\text{all}}{\in} \tilde{\mathbf{A}}^{\aleph}$, если c не принадлежит всем \mathbf{A}_i из (13), то это обозначается как $\mathbf{c} \stackrel{0}{\notin} \tilde{\mathbf{A}}^{\aleph}$ или в традиционном смысле как $\mathbf{c} \notin \tilde{\mathbf{A}}^{\aleph}$.

Интерпретация ξ -множеств

Так как рациональные числа есть что-то что находится между целыми числами то ξ -множества это то что находится между обычными множествами. Обычное множество это то что находится «между собой».

Аксиома ξ -множества, интерпретация парадокса Рассела

Добавим аксиому существования ξ -множества:

$$\forall \mathbf{a} \forall \mathbf{b} \exists \tilde{\mathbf{a}} (\mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \wedge \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{b})$$

к системе аксиом наивной теории множеств и используем ее для интерпретации парадокса Рассела. Рассмотрим множества:

$\mathbf{U} = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} = \mathbf{X}\}$ — множество всех множеств;

$\mathbf{U}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$ — множество Рассела, $\mathbf{U}_{\mathbf{R}} \in \mathbf{U}_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow \mathbf{U}_{\mathbf{R}} \notin \mathbf{U}_{\mathbf{R}}$;

$\mathbf{U}_{\mathbf{D}} = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \in \mathbf{X}\}$;

$\mathbf{W} = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \stackrel{1}{\in} \mathbf{X}\}$;

Примером множества принадлежащего \mathbf{W} есть множество:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{a}\} \cup \{\mathbf{X} | \mathbf{a} \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$$

в самом деле, так как $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{\mathbf{a}}$, то справедливо утверждения

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}_{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{a}} \notin \mathbf{A}_{\mathbf{a}}$$

Учитывая все свойства множеств $\mathbf{U}_{\mathbf{R}}$, \mathbf{W} и $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}$ можно сделать следующие утверждения:

Теорема 6. $\forall \mathbf{K} \in \mathbf{U}_{\mathbf{R}} (\mathbf{K} \neq \mathbf{U}_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow \mathbf{K} \notin \mathbf{W})$

Доказательство. В самом деле для всех множеств принадлежащих к U_R , кроме самого U_R (так как $U_R \overset{1}{\in} U_R$), справедливо утверждения $X \notin X$, что не соответствует свойству определения множества W . \square

Используя теорему 6, представим множество Рассела:

$$U_R = A || B = (U_R \cup (U_R \setminus [W \cap U_R])) || (U_R \setminus [W \cap U_R])$$

Гипотеза о равномоности множества и его булеана, Парадокс Кантора

Парадокс Кантора [11] — парадокс теории множеств, который демонстрирует, что предположение о существовании множества всех множеств ведет к противоречиям и, следовательно, противоречивой является теория, в которой построение такого множества возможно.

Для объяснение парадокса Кантора рассмотрим теорему кантора.

Теорема 7 (Кантор). *Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.*

Доказательство. Предположим, что существует множество A , равномоное множеству всех своих подмножеств 2^A , то есть, что существует такая биекция f , ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A .

Рассмотрим множество B , состоящее из всех элементов A , не принадлежащих своим образом при отображении f (оно существует по аксиоме выделения):

$$B = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \}$$

f биективно, а $B \subseteq A$, поэтому существует $y \in A$ такой, что $f(y) = B$. Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B . Если $y \in B$, то $y \in f(y)$, а тогда, по определению B , $y \notin B$. И наоборот, если $y \notin B$, то $y \notin f(y)$, а следовательно, $y \in B$. В любом случае, получаем противоречие.

Следовательно, исходное предположение ложно и A не равномоно 2^A . \square

Доказательство теоремы 7 производится методом от противного и на основе противоречия (с точки зрения наивной теории множеств) $y \in B \Leftrightarrow y \notin B$. Но если принять что множество B это ξ -множество класса 2:

$$B = \{y\} \cup D || D, \text{ где } D = \{x \mid x \notin f(x) \wedge x \neq y\}$$

тогда $y \overset{1}{\in} B$.

Гипотеза о равномоности множества и его булеана заключается в следующем:

Множество всех множеств не может существовать в терминах наивной теории множеств, но если рассматривать его с точки зрения ξ -множеств, то имеет место равномоности множества и его булеана.

Список литературы

- [1] Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с. — (Математика в техническом университете; Вып. XI).
- [2] Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 656 с.
- [3] Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. — Том 2.
- [4] Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними.
- [5] Weisstein, Eric W. Delta Function (англ.) на сайте Wolfram MathWorld.
- [6] Прахар. Распределение простых чисел. — Мир, 1967.
- [7] Г. П. Шпенков Физический смысл мнимой единицы i
<http://shpenkov.janmax.com/ImaginUnitRus.pdf>

- [8] Davis Harry F. Fourier Series and Orthogonal Functions. — Dover, 1989.
- [9] Hardy G.H. Divergent Series. — Clarendon Press, 1949.
- [10] Ю. С. Богданов — «Лекции по математическому анализу» — Часть 2 — Минск — Издательство БГУ им. В. И. Ленина — 1978.
- [11] Р. Кургант Г. Роббинс Что такое математика? — МЦНМО, 2000.